

Dans cette séance on va voir :

- (i) une simplification dans la définition d'inversibilité de matrices
- (ii) un rappel de la définition du déterminant  $2 \times 2$   $\rightarrow$  propriétés
- (iii) la définition générale du déterminant  $n \times n$   $\rightarrow$  calcul récursif
- (iv) propriétés du déterminant (transposition, OEL, ...)

Corollaire du Thm 7.15\* (Proposition 7) Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Alors,  $A$  est inversible ss il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $BA = I_n$ ,  
ss il existe  $C \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AC = I_n$   
(et dans ce cas  $A^{-1} = B = C$ ).

(Preuve) C'est direct que, si  $A$  est inversible, alors il existe les matrices  $B$  et  $C$  souhaitées, car on prend  $B = C = A^{-1}$ . S'il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $BA = I_n$ , alors le SEL  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  admet seulement la solution triviale, vu que  $\underbrace{BA}_{I_n} \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{0} = \vec{0}$ , i.e.  $\vec{x} = \vec{0}$ . D'après le Thm 7.15\*,  $A$  est inversible.

Finalement, s'il existe  $C \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AC = I_n$ , alors, pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$  on a que  $A(C \cdot \vec{b}) = I_n \cdot \vec{b} = \vec{b}$ , ce qui nous dit que les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ . D'après le Thm 7.15\*,  $A$  est inversible.

En plus,  $B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot C = I_n \cdot C = C$   
et  $B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$  } nous disent que  $A^{-1} = B = C$   $\square$

## Chapitre 9 | Déterminant

### §9.1. Rappel du déterminant $2 \times 2$

On rappelle que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

le Chapitre 8 sera vu plus tard !

Ce sera utile de voir le déterminant comme une fonction des colonnes de la matrice :  $\det: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  via

$$\det \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

### Propriétés (Proposition 8)

$$\begin{aligned} (\text{DET.1}) \quad & \det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b}); \\ & \det(\bar{a}, \bar{b} + \lambda \bar{b}') = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}, \bar{b}'); \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{multilinearité} \\ \text{(bilinearité)} \end{array} \right\}$$

$$(\text{DET.2}) \quad \det(\bar{a}, \bar{a}) = 0; \quad \left. \begin{array}{l} \text{alternance} \end{array} \right\}$$

$$(\text{DET.3}) \quad \det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1, \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \left. \begin{array}{l} \text{normalisation} \end{array} \right\}$$

$$\forall \bar{a}, \bar{a}', \bar{b}, \bar{b}' \in \mathbb{R}^2$$

(Preuve) Pour la première identité de (DET.1), on voit que

$$\begin{aligned} \det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) &= (a_1 + \lambda a'_1) b_2 - b_1 (a_2 + \lambda a'_2) = (a_1 b_2 - b_1 a_2) + \lambda (a'_1 b_2 - b_1 a'_2) \\ &= \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b}). \end{aligned}$$

La deuxième identité de (DET.2) se montre de façon analogue. Pour montrer (DET.2), on note que

$$\det(\bar{a}, \bar{a}) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

tandis que pour (DET.3) on voit que

$$\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

□

(RK 9.1) (DET.1) + (DET.2)  $\Rightarrow \det(\bar{a}, \bar{b}) = -\det(\bar{b}, \bar{a})$

vu que  $0 = \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) \stackrel{(\text{DET.2})}{=} \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a}) + \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b}) \stackrel{(\text{DET.1})}{=} \det(\bar{a}, \bar{a}) + \det(\bar{b}, \bar{a}) + \det(\bar{a}, \bar{b}) + \det(\bar{b}, \bar{b}) \stackrel{(\text{DET.2})}{=} 0 + \det(\bar{b}, \bar{a}) + \det(\bar{a}, \bar{b}) + 0$

i.e.  $\det(\bar{a}, \bar{b}) = -\det(\bar{b}, \bar{a}).$  □

## § 9.2. Définition générale du déterminant

Définition 9.2 | Une application  $\varphi: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  <sup>n facteurs</sup> est dite

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

(MUL) multilinéaire si pour tout  $i \in [1, n]$  et tous vecteurs  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$  fixes, l'a

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \longmapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{x}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n)$$

est linéaire ;

(ALT) alternée si  $\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$  dès que deux vecteurs  $\bar{a}_i$  et  $\bar{a}_j$  coïncident pour  $i \neq j$ ;

(NoR) normalisée si  $\varphi(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = 1$ , où  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , ...,  $\bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

**RK.9.3** De la même façon que dans la RK.9.1,

$$|\text{MUL}| + |\text{ALT}| \Rightarrow \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$$

transposition de  $\bar{a}_i$  et  $\bar{a}_j$

**Définition 9.4** Si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit la sous-matrice principale  $A[i|j] \in M_{(m-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$  comme la matrice obtenue de  $A$  en éliminant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

**Exemple 9.5\*** Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , on a  $A[1|2] = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ ,

$$A[3|1] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } A[2|3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Thm 9.6** Étant donné  $\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix}$ , il existe une unique application multilinéaire et alternée  $\Phi_{n,c} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \longmapsto \Phi_{n,c}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

$n$  facteurs

telle que  $\Phi_{n,c}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = c$ . L'application  $\Phi_{n,1}$  est appelée déterminant et elle est notée  $\det$ .

Pour  $n=1$ ,  $\det = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et pour  $n=2$ ,  $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ .

En plus, pour  $n \geq 2$ ,  $\Phi_{n,1}$  peut être calculée à partir de  $\boxed{27}$   
 $\underbrace{\Phi_{n-1,1}}_{\det}$  par l'une quelconque <sup>det</sup> des identités suivantes:

Ligne (développement selon l'ième ligne)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \cdot \det(A[i|k])$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

pour n'importe  
quelle  
ligne  
/ colonne!

Colonne (développement selon la j-ème colonne)

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+j} a_{l,j} \cdot \det(A[l|j])$$

(Preuve) Omise  $\square$

Alors

Thm 9.6 + Déf du det pour  $n=2$

Calcul récuratif d'un  
déterminant quelconque

Exemple 9.7 On va calculer  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

Par exemple, si on développe selon la 1ère ligne:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8)}_{-3} - 2 \cdot \underbrace{(4 \cdot 9 + 6 \cdot 7)}_{78} - 3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 8 + 5 \cdot 7)}_{67} = -3 - 156 - 201 \\ &= -360. \end{aligned}$$

Sinon, si on développe selon la 3ème colonne, par exemple,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} + 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= -3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 8 + 5 \cdot 7)}_{67} - 6 \cdot \underbrace{(1 \cdot 8 + 2 \cdot 7)}_{22} + 9 \cdot \underbrace{(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)}_{-3} \\
 &= -201 - 132 - 27 = -360.
 \end{aligned}$$

### § 9.3. Propriétés

Définition 9.8 Si  $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ , on définit le déterminant de  $A$  via  $\det(A) := \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ .

$\downarrow$  1<sup>ère</sup> colonne
 $\downarrow$  n<sup>ème</sup> colonne

Lemme 13  $\det(A^T) = \det(A), \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ .

(Preuve) Par récurrence sur  $n=2$ . Si  $n=2$ ,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \right).$$

On suppose maintenant que  $\det(A) = \det(A^T)$  pour des matrices carrées  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On va montrer que c'est vrai pour  $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ . Si l'on développe selon la 1<sup>ère</sup> colonne, alors

$$\begin{aligned}
 \det(A^T) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A^T)_{j,1} \det(A^T[j|1]) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A)_{1,j} \det(A[1|j]^T) \\
 &\quad \text{par hyp. de récurrence} \quad \uparrow \quad (A^T[j|1] = A[1|j]^T \text{ par déf. 8}) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A)_{1,j} \det(A[1|j]) = \det(A). \quad \square
 \end{aligned}$$

Déf 9.12  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est triangulaire supérieure si  $a_{ij} = 0$  pour tous  $i > j$ . En plus, on dit que  $A$  est diagonale si  $a_{ij} = 0$  pour tous  $i \neq j$ .

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Exemple 9.13

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ est triangulaire supérieure.}$$

28

Lemme 14

Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est triangulaire supérieure, alors

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

(Preuve) Pour  $n=2$ , on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous dit que  $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2}$ . On procède par récurrence. On suppose que le résultat est vrai pour tout  $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ . On va le montrer pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si l'on développe selon la 1ère colonne, alors

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n})$$

matrice triangulaire supérieure  $\square$

hypothèse de la récurrence

Proposition 9 Propriétés du déterminant sous des OEL / OFC

(OEL.I)  $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) = -\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n);$

transposition des colonnes  $i$  et  $j$

(OEL.II)  $\det(\bar{a}_1, \dots, \lambda \cdot \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) = \lambda \cdot \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n), \forall \lambda \in \mathbb{R};$

(OEL.III)  $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n), \forall \lambda \in \mathbb{R}, j \neq i.$

(Preuve) Ces identités suivent du Thm 9.6.  $\square$